Μαθημα 6ο 20/3/2017

Τοπολογια

Προταση

α εξωτερικο του A $\Leftrightarrow$ $a \in (A^c)^o$ ($\Rightarrow a \in A^c$)

Συμβολισμος: ext A ≡ συνολο εξωτερικων σημειων του A

$\rightarrow$ $ext A = (A^c)^o = (\bar{A})^c$

Ορισμος

Ενα σημειο α λεγεται συνοριακο σημειο του A αν και μονο αν το α δεν ειναι εσωτερικο σημειο του A, ουτε εξωτερικο σημειο του A

α συνοριακο του A $\Leftrightarrow$ $\left\{\right.$ Το α δεν ειναι εσωτερικο, ουτε εξωτερικο του A

Συμβολισμος: ∂A ≡ συνολο συνοριακων σημειων του A

Σχολιο!

Οχι Εσωτ.

$(\mathbb{R}, |\,|)$, $A = (0,1]$ τοτε $A^o = (0,1)$, $A^c = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

παρατηρουμε λοιπον οτι το $1 \notin (A^c)^o$ και επισης $1 \notin ext A$

συνεπως το $1 \in \partial A$ (συνοριακο)

Προταση {ισοδυναμες εκφρασεις για το συνορο}

Για καθε συνολο A ισχυει:

1) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

2) $\partial A = \bar{A} - A^o$ {πιο δημοφιλης το θυμαται κανεις πιο ευκολα}

3) $\partial A = \overline{A^c} - ext A$

Αποδειξη

1) $\partial A \overset{\text{ορ}}{=} (A^o)^c \cap (\text{ext}A)^c = \overline{A^c} \cap [(\overline{A})^c]^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

2) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} - (\overline{A^c})^c = \overline{A} - ((A^o)^c)^c = \overline{A} - A^o$

3) Σαν ασκηση σπιτι!

Προταση

Ισχυει οτι:

1) $\overline{A} = A^o \cup \partial A = A \cup \partial A$ (Διαγραφη ΠΟΤΕ!)

2) $\partial A = \partial A^c$

3) $\overline{\partial A} = \partial A$

θεμ. εν.
$X \subseteq Y \Rightarrow Y = (Y - X) \cup X$

Αποδειξη

1) $\overline{A} = (\overline{A} - A^o) \cup A^o = \partial A \cup A^o = A^o \cup \partial A$

$\overline{A} = A \cup \partial A$ θα δειξω αυτη τη σχεση τωρα

ισχυει $A \subseteq \overline{A}$, $\partial A = \overline{A} - A^o \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \cup \partial A \subseteq \overline{A}$

Ο.δ.ο $\overline{A} \subseteq A \cup \partial A$

Εστω x τυχον με $x \in \overline{A}$

Διακρινω δυο περιπτωσεις

1η $x \in A$ και 2η $x \notin A$

Αν $x \in A \Rightarrow x \in A \cup \partial A$ το οποιο ισχυει (προφανως)

Αν $x \notin A \xrightarrow{A^o \subseteq A} x \notin A^o \xrightarrow{x \in \overline{A}} x \in \overline{A} - A^o = \partial A \overset{(*)}{\Rightarrow}$
$x \in A \cup \partial A$ (*) Απο την προταση πριν

Συνεπως ισχυει σε καθε περιπτωση, αρα $\overline{A} = A \cup \partial A$

2) $\partial A^c = \overline{A^c} \cap \overline{(A^c)^c} = \overline{A^c} \cap \overline{A} = \partial A$

↳ Απο την προταση πριν.

3) $\overline{\partial A} = \overline{\overline{A} \cap \overline{A^c}} = \dots$

Σαν ασκηση σπιτι!

Προταση

Για τυχοντα μ.χ E και $A \subseteq E$ ισχυει οτι:

$E = A^o \cup \partial A \cup \text{ext}A$ αν ειναι επιπλεον και $\neq \emptyset$ τοτε εχω διαμεριση του E

Αποδειξη

Βγαινει απο τον ορισμο του συνοριακου σημειου.

Βλεπε και βιβλιο Τσαματου

Προταση

1) $\partial A^o \subseteq \partial A$

2) $\partial \overline{A} \subseteq \partial A$

Αποδειξη

1) $\partial A^o = \overline{A^o} - (A^o)^o = \overline{A^o} - A^o \subseteq \overline{A} - A^o$ (γιατι $A^o \subseteq A \Rightarrow \overline{A^o} \subseteq \overline{A}$)

$\Rightarrow \partial A^o \subseteq \overline{A} - A^o = \partial A \Rightarrow \partial A^o \subseteq \partial A$

2) $\partial \overline{A} = \overline{\overline{A}} - (\overline{A})^o = \overline{A} - (\overline{A})^o$

ισχυει $\overline{A} \supseteq A \Rightarrow (\overline{A})^o \supseteq A^o$

$\Rightarrow \partial \overline{A} \subseteq \overline{A} - A^o = \partial A \Rightarrow \partial \overline{A} \subseteq \partial A$

(*) $A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} \overline{A} \subseteq \overline{B} \\ A^o \subseteq B^o \\ A' \subseteq B' \end{cases}$

Scanned by CamScanner

2) ($\Rightarrow$) Εστω A ανοιχτο. Θδο $\partial A \subseteq A^c$

Εστω x τυχον, $x \in \partial A \Leftrightarrow x \in \bar{A} - A^o \Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \notin A^o \Rightarrow$
$x \notin A^o \xrightarrow{A \text{ ανοιχτο}} A \Rightarrow x \in A^c$

($\Leftarrow$) Εστω $\partial A \subseteq A^c$. Θδο $A = A^o$ ή ισοδυναμα $A \subseteq A^o$
$x \in A \Rightarrow x \notin A^c \xrightarrow{\partial A \subseteq A^c} x \notin \partial A = \bar{A} - A^o \Rightarrow$
$x \notin \bar{A} \vee x \in A^o$, $x \notin \bar{A}$ δεν μπορει να ισχυει διοτι
τοτε $x \notin A$ αφου $A \subseteq \bar{A}$ οποτε $x \in A \Rightarrow x \in A^o$ που ισχυει!

3) Απο βιβλιο

4) ($\Rightarrow$) Εστω A κλειστο. Θδο $\partial A \subseteq A$
$x \in \partial A = \bar{A} - A^o \Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \notin A^o \xrightarrow[A = \bar{A}]{A \text{ κλειστο}} x \in A \wedge x \notin A^o$
$\Rightarrow x \in A$

($\Leftarrow$) Εστω $\partial A \subseteq A$. Θδο $A = \bar{A}$ ή ισοδυναμα $\bar{A} \subseteq A$
(ισχυει $A \subseteq \bar{A}$)
$x \notin A \xrightarrow{\partial A \subseteq A} x \notin \partial A = \bar{A} - A^o \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \vee x \in A^o$
αν $x \in A^o \xrightarrow{A^o \subseteq A} x \in A$ ατοπο διοτι $x \notin A$ αρα απο
αυτη τη σχεση $x \notin A \Rightarrow x \notin \bar{A}$

5) Διακριτος μ.χ (E, ρ) με $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

$B(a,1) = \{x : \rho(x,a) < 1 = \{x : \rho(x,a) = 0\} = \{a\}$
$B(a,r) = \{a\}$ με $r < 1$
$r > 1$: $B(a,r) = E$
Αρα $B(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & r \leq 1 \\ E, & r > 1 \end{cases}$

Σχόλιο

- $A \subseteq E$ και $a \in A$ τότε $B(a,1) = \{a\} \subseteq A \Rightarrow a \in A^{o}$

Δηλαδή $A \subseteq A^{o} \Leftrightarrow A = A^{o}$

- $A \subseteq E$ τότε ισχύει $A \subseteq \bar{A}$

Έστω a τυχόν, $a \in \bar{A} \overset{\text{ορ.}}{\Rightarrow} (\forall r > 0)\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ για $r = 1$, $B(a,1) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \{a\} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$a \in A$

Άρα $\bar{A} \subseteq A$ δηλαδή $\bar{A} = A$

Άσκηση

1. $\partial(\partial A) \subseteq \partial A$
2. $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A)$

Απόδειξη

1. $\partial(\partial A) = \overline{\partial A} - (\partial A)^{o} \xrightarrow{\overline{\partial A} = \partial A} \partial A - (\partial A)^{o} \subseteq \partial A$

$\Rightarrow$ Υπάρχουν στο βιβλίο του

⋕ Νικολιδακης ⋕

Προταση

(E,ρ) μ.χ και $A \subseteq E$ τοτε

1) A ανοιχτο $\Leftrightarrow$ A^c κλειστο

2) A κλειστο $\Leftrightarrow$ A^c ανοιχτο

Αποδειξη

1) A ανοιχτο θδο A^c κλειστο

Αρκει $\overline{A^c} = A^c$ ομως $\overline{A^c} = (A^\circ)^c \xlongequal{A \text{ ανοιχτο}} A^c$

2) Παρομοια και αυτο!

Παρατηρηση

(E,ρ) μ.χ και $\emptyset \neq A \subseteq E$ και ενα $x \in ext(A)$

με $ext(A) = (\overline{A})^c = (A^c)^\circ$

$x \in ext(A) \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) > 0$

$\{ x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A)$ το εχουμε δειξει... $\}$

Προταση

(E,ρ) μ.χ τοτε

1) $(A_i)_{i\in I}$ οικογενεια ανοιχτων υποσυνολων του E

$\Rightarrow \underbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}_{\Delta}$ ανοιχτο

αποδειξη

αρκει $\forall x \in \Delta \Rightarrow x \in \Delta^\circ$ (διοτι $\Delta^\circ \supseteq \Delta$)

αν $(\exists r > 0)\ B(x,r) \subseteq \Delta$ με $\Delta = \bigcup_{i\in I} A_i$

$x \in \Delta \Rightarrow \exists\, i \in I : x \in A_i = \mathring{A}_i \Rightarrow \exists\, r_i > 0\ B(x,r_i) \subset A_i \subseteq \Delta$

2) Αν $(A_i)_{i\in I}$ οικογενεια κλειστων υποσυνολων του E

$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ κλειστο αποδειξη

Θετω $\Delta_1 = \bigcap_{i\in I} A_i$

αρκει Δ_1 κλειστο $\Leftrightarrow \Delta_1^c$ ανοιχτο

$\Delta_1^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

A_i κλειστα $\forall\, i\in I \Rightarrow A_i^c$ αν $\forall\, i\in I$

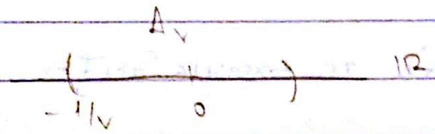
⊛ 1. A_i ανοιχτο $\overset{?}{\Rightarrow} \bigcap A_i$ ανοιχτο ?

2. Αν $A, B \subseteq E$ ανοιχτα $\Rightarrow A\cap B$ ανοιχτο

αποδειξη

2. αρκει $(A\cap B)^o = A\cap B \Rightarrow A^o \cap B^o = A^o \cap B^o$ επειδη τα A, B ανοιχτα

3. — π.χ



(A_ν) ακολουθια ανοιχτων με $\nu \in \mathbb{N}$

$\bigcap A_\nu$ οχι ανοιχτο με $A_\nu = \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = B_{(\mathbb{R})}\left(0, \frac{1}{\nu}\right)$

$\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu = \{0\}$ ειναι ανοιχτο?

Εστω $B = \{0\}$ εχει ενα σημειο

Συνεπως δεν ειναι ανοιχτο!

4. Αν A, B κλειστα υποσυνολα του $E \Rightarrow (A\cup B)$ κλειστά

$\overline{A\cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} = A\cup B \Rightarrow A\cup B$ κλειστο

$(A\cup B)^c$ θελω νδο ειναι ανοιχτο!

$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ ανοιχτο (ως πεπερασμενη τομη ανοιχτων)

Άσκηση 1

(E,ρ) μ.χ , $V \subseteq E$, $a \in E$ τότε V δεν είναι περιοχή του a $\iff$ $a \in (V^{o})^{c}$

Λύση

V είναι περιοχή του a $\overset{op}{\iff} (\exists r>0)\ B(a,r) \subseteq V$

V δεν είναι περιοχή του $a \in E$ $\iff (\forall r>0)\ B(a,r) \nsubseteq V$

(σημαίνει ότι τέμνει και έξω του V)

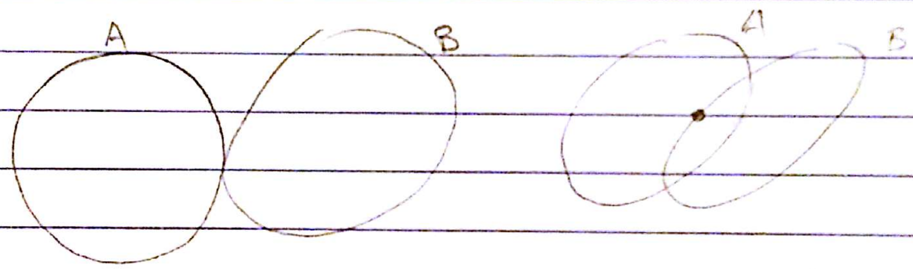
$\iff (\forall r>0)\ B(a,r) \cap V^{c} \neq \emptyset \iff a \in \overline{V^{c}} = (V^{o})^{c}$

Άσκηση 2

(E,ρ) μ.χ , A ανοιχτό με $A \subseteq E$

B τυχόν με $B \subseteq E$ τότε $A \cap \overline{B} \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

Λύση



$A \cap \overline{B} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow \overset{①'}{x \in A}$ και $\overset{②'}{x \in \overline{B}}$

①' $x \in A = A^{o} \Rightarrow (\exists r>0)\ B(x,r) \subseteq A$

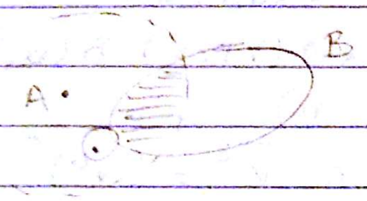
Εφόσον $x \in \overline{B} \overset{op}{\Longrightarrow} B \cap B(x,r) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists y \in B \cap B(x,r) \subseteq B \cap A \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

Ασκηση 3

(E,ρ) μ.χ , A ανοιχτο και B κλειστο τοτε A-B ανοιχτο

Λυση



$A-B = A \cap B^c$ A ανοιχτο , B ανοιχτο ως συμπληρωμα

αρα A-B ανοιχτο